САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА

САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2014 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2014 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Фотография Солнца, полученная на обсерватории "Жигули"»

Условие. В период с 8 по 14 августа 2013 года на обсерватории ДООЦ «Жигули» Бахтиновым П.И. при участии Гришина К.А. были проведены наблюдения Солнца, в частности, была получена фотография (см. рис. 1) части видимого диска Солнца. Какие активные образования атмосферы Солнца отчетливо различимы на этой фотографии? Какова физическая причина их возникновения? В какой структурной зоне Солнца они расположены? (3 балла).

Рис. 1.

Решение:

На фотографии отчетливо просматриваются два типа активных образований в нижней зоне атмосферы Солнца – ***фотосфере***:

1. ***Солнечные пятна*** – темные области фотосферы Солнца, температура которых понижена примерно на 1500 К по сравнению с окружающими участками фотосферы. Солнечные пятна являются областями выхода в фотосферу сильных магнитных полей. Потемнение фотосферы в области пятен обусловлено подавлением магнитным полем конвективных движений горячей плазмы, движущейся из более горячих, глубоких областей, вследствие чего, снижается приток тепловой энергии в эти области и потому они успевают остыть до более низких температур.

2. ***Солнечные факелы*** – яркие по сравнению с общим фоном области, как правило, окружающие солнечные пятна. Они могут занимать большую часть видимой поверхности Солнца. Их возникновение обусловлено одним из свойств магнитного поля, а именно: магнитное поле препятствует движению вещества в том случае, когда оно происходит поперек силовых линий. Если энергия магнитного поля велика, то возможно движение вещества исключительно вдоль силовых линий. В противном случае, слабое магнитное поле в факельной области не способно остановить достаточно мощных конвективных движений, хотя и может придать им

более упорядоченный характер. Напряженность магнитного поля в области факела гораздо меньше, чем в других областях. Это позволяет газам подниматься выше и переносить гораздо больший поток энергии. Таким образом, *факелы появляются при усилении конвекции, которое вызвано слабым магнитным полем.*

Температура плазмы в области факела примерно на 2000 K больше температуры окружающих областей. Как правило, факелы объединяются в факельные поля (на рис. 1 видны как сетка малых светлых пятен). Нередко встречаются факельные поля, в которых не появляются пятна. Количество пятен и факелов зависит от степени солнечной активности. ($\$_{\max} = 3$ балла)

Задача № 2. «О протяженности г. Самара вдоль круга широты»

Условие. Как известно, протяженность г. Самара вдоль круга широты составляет 20 км. На сколько отличается географические долготы самой восточной и самой западной точки города? На сколько отличаются моменты времени наступления верхней кульминации Солнца для наблюдателей в этих точках. В расчетах следует полагать, что Земля есть шар радиуса $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км, широта г. Самара – $\varphi_S = 53°12'$. (3 балла).

Дано:
$\Delta\ell = 20$ км,
$\varphi_S = 53°12'$,
$\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км.

Найти:
$\Delta\lambda$, ΔT - ?

Решение:

Пусть точка S_E – самая восточная точка г. Самара, а S_W – самая западная его точка (см. рис. 2). Географические долготы данных точек, откладываемые вдоль экватора $q_1 q_2$ от Гринвичского меридиана, равны λ_E, λ_W соответственно. Разность географических долгот $\Delta\lambda = \lambda_E - \lambda_W$. Последний угол соответствует части дуги $\Delta\ell = 20$ км круга широты, на котором располагается г. Самара. С другой стороны, длина всей дуги этого круга есть $L = 2\pi\mathfrak{R}_\oplus \cos\varphi_S$, отвечает углу в 360°.

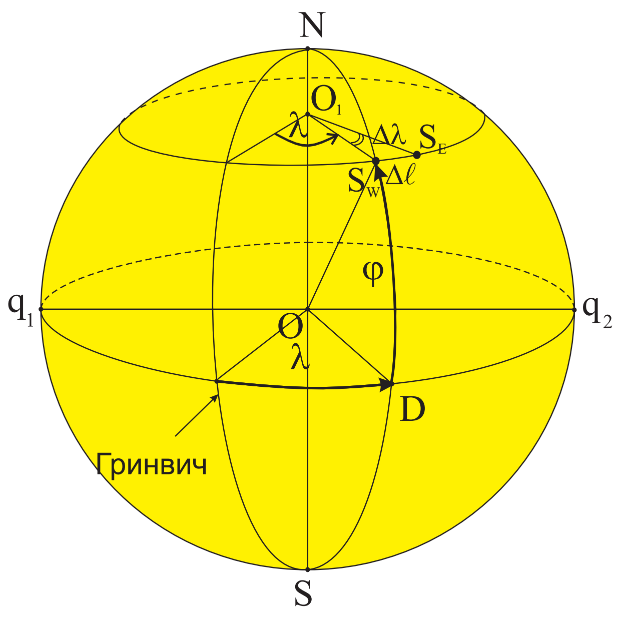

Рис. 2. К определению разности географических долгот.

Составим пропорцию:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &\to \Delta\ell, \\ 360° &\to L, \ \Rightarrow \Delta\lambda = 360° \left(\frac{\Delta\ell}{L}\right), \\ \Delta\lambda &= 360° \left(\frac{\ell}{2\pi\mathfrak{R}_\oplus \cos\varphi_S}\right) = 0.300° = 18'01''. \end{aligned}$$

Разность моментов верхней кульминации Солнца для наблюдателей в этих точках, согласно второй теореме о связи географических и небесных координат, определяются разностью географических долгот этих точек:

$$\Delta T = T_E - T_W = \lambda_E - \lambda_W = 1.20^m = 1^m 12^s. \quad (1)$$

При вычислении последнего результата мы учли, что $15'$ отвечают 1^m, $15'' \to 1^s$.

Ответ: $\Delta\lambda = 360° \left(\frac{\ell}{2\pi\mathfrak{R}_\oplus \cos\varphi_S}\right) = 0.300° = 18'01''$, $\Delta T = \Delta\lambda = 1.20^m = 1^m 12^s$. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Продолжительность меркурианских суток»

Условие. Как известно, год на Меркурии длится $P = 88.0$ суток, а период обращения вокруг своей оси составляет $T = 58.7$ суток (направления обоих вращений совпадают). Найдите продолжительность меркурианских суток. (3 балла).

Дано:
$P = 88.0$ сут,
$T = 58.7$ сут.
Найти:
S - ?

Решение:

Меркурианский год (P) – промежуток времени, в течение которого Меркурий делает один полный оборот вокруг Солнца. ***Меркурианские сутки*** (S) – промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями Солнца для воображаемого наблюдателя, находящегося в какой-либо точке поверхности планеты. Поскольку, сидерический период вращения планеты T определяется относительно далеких звезд, а меркурианские сутки S относительно Солнца (относительно которого планета движется), то за один год P число оборотов планеты $N_1 = P/T$ вокруг своей оси должно быть на единицу больше количества суток $N_2 = P/S$, т.е.

$$N_1 = N_2 + 1, \;\Rightarrow\; P/T = P/S + 1, \;\Rightarrow\; S = \frac{P\,T}{P-T} = 176.3\,\text{сут.}$$

Ответ: $S = \dfrac{P\,T}{P-T} = 176.3\,$сут. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Млечный путь, тусклые звезды и галактики»

Условие. При наблюдении Млечного Пути и его окрестностей легко обнаружить уникальную закономерность: на единичной площадке небосвода, в области Млечного пути можно разглядеть большое количество тусклых звезд и минимальное количество тусклых галактик. Вдали от Млечного пути – ситуация противоположная. Как Вы можете объяснить данную закономерность? (4 балла).

Решение:

Наблюдая области неба, близкие к Млечному Пути, мы видим звезды нашей Галактики, сконцентрированные в ее диске. Именно их излучение сливается в светлую полосу Млечного Пути. Вдоль Млечного Пути наблюдается много молодых горячих звезд, которые рождаются из уплотненного в галактической плоскости межзвездного вещества. Однако все это вещество, точнее, его пылевая составляющая, поглощает свет более далеких объектов. Поэтому галактики практически не видны вблизи полосы Млечного Пути. И наоборот, вдали от Млечного Пути звезд нашей галактики наблюдается гораздо меньше, поглощение газо-пылевой составляющей практически отсутствует, и потому мы видим много галактик. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Электрон и протон – основные "кирпичики" Вселенной»

Условие. Как известно протон (масса – $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, электрический заряд – $q_p = 1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл) и электрон (масса – $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг, электрический заряд – $q_e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл) являются основными строительными "кирпичиками", из которых состоит доминирующая часть видимого вещества Вселенной. Оцените, во сколько раз сила взаимодействия этих частиц посредством электрического поля больше их силы взаимодействия, обусловленного гравитационным полем. Небесные тела состоят из огромного числа протонов и электронов. Почему при описании их движения мы учитываем лишь силы взаимного тяготения, пренебрегая силой электрического взаимодействия? (4 балла).

Дано:
$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг,
$q_p = 1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг,
$q_e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл.
Найти:
S - ?

Решение:

Сила взаимодействия этих частиц посредством электрического поля определяется *законом Кулона*:

$$F_C = \frac{k\,q_p\,q_e}{r^2}, \tag{2}$$

где $k_c = 8.992 \cdot 10^9$ Н·м^2/Кл^2 – постоянная Кулона, r – расстояние между частицами. Сила взаимодействия частиц, обусловленная гравитационным полем определяется *законом всемирного тяготения Ньютона*:

$$F_N = \frac{G\, m_p\, m_e}{r^2}, \tag{3}$$

где $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Найдем отношение выше указанных сил:

$$\eta = \frac{F_C}{F_N} = \frac{k\, q_p\, q_e}{G\, m_p\, m_e} = \frac{2.302 \cdot 10^{-28}}{1.015 \cdot 10^{-67}} = 2.27 \cdot 10^{39}. \tag{4}$$

Т.о. сила взаимодействия этих частиц посредством электрического поля больше их силы взаимодействия, обусловленного гравитационным полем, в $2.3 \cdot 10^{39}$ раз.

Макроскопические тела состоят из атомарного (молекулярного) вещества, либо из плазмы, основу которой составляют протоны и электроны. Несмотря, на их огромное количество в этих телах, количество протонов, как правило, равно количеству электронов. Они образуют при этом либо нейтральные атомы, либо квазинейтральную плазму. Следовательно, суммарный электрический заряд данных тел равен нулю, и потому сила электрического взаимодействия, согласно (2), равна нулю.

Ответ: $\eta = \frac{F_C}{F_N} = 2.3 \cdot 10^{39}$; количество протонов, как правило, равно количеству электронов в небесных телах, – суммарный электрический заряд данных тел равен нулю, и потому сила электрического взаимодействия равна нулю, т.е. электромагнитное взаимодействие отсутствует. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Положение центра масс Солнечной системы»

Условие. Определите, внутри или вне Солнца находится центр масс Солнечной системы, пренебрегая массами всех планет, кроме Юпитера. Масса Солнца $\mathfrak{M}_\odot = 1048 \cdot \mathfrak{M}_{♃}$, где $\mathfrak{M}_{♃}$ – масса Юпитера. Известно, что диаметр Солнца в 107 раз меньше расстояния от Земли до Солнца, а расстояние от Юпитера до Солнца составляет $a_{♃} = 5.2$ а.е (5 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_\odot = 1048 \cdot \mathfrak{M}_{♃}$,
$D_\odot = a_\oplus/107$,
$a_{♃} = 5.2$ а.е.

Найти:
$r_\odot$ – ?

Решение:

Согласно определению, радиус-вектор системы "Солнце-Юпитер" в произвольной системе отсчета представляется в виде:

$$\vec{R}_c = \frac{\mathfrak{M}_\odot \cdot \vec{r}_\odot + \mathfrak{M}_{♃} \cdot \vec{r}_{♃}}{\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_{♃}}. \tag{5}$$

здесь $\vec{r}_\odot$, $\vec{r}_{♃}$ – радиус-векторы данных тел. В системе отсчета, начало которой совпадает с центром масс системы $\vec{R}_c = 0$, тогда в проекциях на направление "Солнце-Юпитер" выражение (5) представляется в виде:

$$-\mathfrak{M}_\odot \cdot r_\odot + \mathfrak{M}_{♃} \cdot r_{♃} = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что центр масс системы находится на прямой соединяющей данные тела, следовательно, выполняется равенство

$$r_\odot + r_{♃} = a_{♃}. \tag{7}$$

Решая полученную систему уравнений (6), (7) относительно $r_\odot$, $r_{♃}$ в итоге получаем

$$r_\odot = a_{♃}\left[\frac{\eta}{1+\eta}\right], \;\; r_{♃} = a_{♃}\left[\frac{1}{1+\eta}\right], \;\; \text{где}\;\; \eta = \frac{\mathfrak{M}_{♃}}{\mathfrak{M}_\odot}.$$

Выполняя численный расчет, в итоге получаем $r_\odot = 4.97 \cdot 10^{-3}$ а.е. С другой стороны, радиус Солнца $\mathfrak{R}_\odot = D_\odot/2 = 4.67 \cdot 10^{-3}$ а.е. Т.о.

$$r_\odot > \mathfrak{R}_\odot,$$

следовательно, центр масс Солнечной системы лежит вне Солнца.

Ответ: $r_\odot = 4.97 \cdot 10^{-3} > \mathfrak{R}_\odot$, центр масс Солнечной системы лежит вне тела Солнца, хотя весьма близко к его поверхности. ($\$_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Сколько звезд, видимых невооруженным глазом, над горизонтом?»

Условие. Как известно, математический горизонт делит небесную сферу на две равных полусферы. Полагая, что общее число звезд, видимых на небе обоих полусфер, равно N (при наблюдении невооруженным глазом $N = 6000$), и что звезды распределены по небосводу равномерно, определите количество звезд, которые мы видим над горизонтом и количество звезд, находящихся под горизонтом. (6 баллов).

Решение:

На первый взгляд, может показаться, что количество звезд, видимых над горизонтом, должно равняться количеству звезд, которых мы увидеть не можем, т.к. они находятся под горизонтом. На самом деле из-за атмосферной рефракции мы можем увидеть над горизонтом не только звезды верхней половины небесной сферы (их число равно N/2), но и звезды, находящиеся в поясе с угловой шириной $\rho'' = 35'$ под математическим горизонтом (см. рис. 3). Вычислим количество ΔN таких звезд.

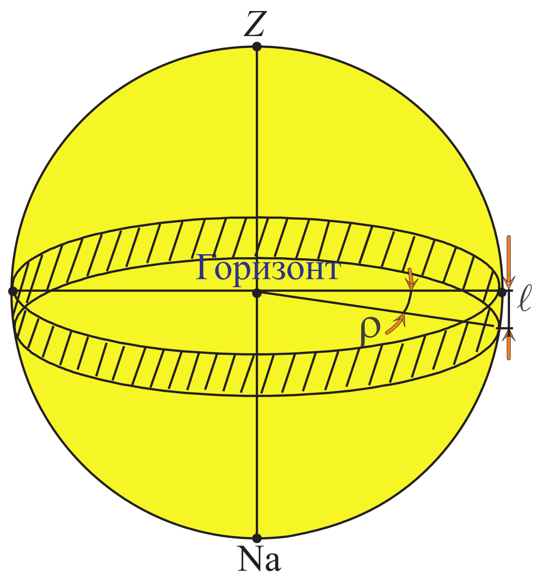

Рис. 3. К определению пояса звезд, видимых над горизонтом, за счет рефракции света.

Пусть R – радиус небесной сферы (конечно, его величина неопределенная, но это для решения задачи не играет роли). Тогда площадь поверхности небесной сферы будет

$$S_{\text{sphere}} = 4\pi\, R^2,$$

а площадь пояса под горизонтом

$$S_{\text{belt}} = 2\pi\, R\,\ell = 2\pi\, R^2\,\rho = 2\pi\, R^2\,\frac{\rho''}{3438'},$$

где ρ – это угол $\rho'' = 35'$, выраженный в радианах дуги. Здесь также учтено, что 1 рад $= 3438'$.

Следовательно, количество звезд в поясе под горизонтом, должно удовлетворять условию (в силу равномерного распределения звезд по небосводу):

$$\frac{\Delta N}{S_{\text{belt}}} = \frac{N}{S_{\text{sphere}}}, \;\Rightarrow\; \Delta N = N\left(\frac{S_{\text{belt}}}{S_{\text{sphere}}}\right) = N\left(\frac{\rho''}{6876'}\right) = 0.005\,N.$$

Тогда количество звезд, видимых над горизонтом, есть

$$N_v = \frac{N}{2} + 0.005\,N = 0.505\,N = 3031.$$

Количество звезд, находящихся под горизонтом и не видимых взору наблюдателя:

$$N_n = \frac{N}{2} - 0.005\,N = 0.495\,N = 2969.$$

Т.о. над горизонтом мы увидим на 1% больше звезд ($N_v - N_n = 0.01\,N$), чем не увидим под горизонтом. При наблюдении невооруженным глазом это примерно 60 звезд.

Ответ: $N_v = 0.505\,N = 3031$, $N_n = 0.495\,N = 2969$; Т.о. над горизонтом мы видим на 1% больше звезд, чем не увидим под горизонтом (это примерно 60 звезд). ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 8. «Прохождение спутника над г. Самара»

Искусственный спутник Земли (ИСЗ), находящийся на низкой околоземной орбите, пролетел над г. Самара ($\varphi_S = 53°12'$ с.ш., $\lambda_S = 50°06'$ в.д.). Над каким городом или над какой местностью (приблизительно) он пролетит (см. рис. 5), сделав один полный оборот вокруг Земли? (7 баллов).

Решение:

Низкоорбитальный ИСЗ – искусственный спутник Земли, высота расположения орбиты которого составляет $160 \div 2000$ км. Большинство из них движутся на высотах $300 \div 500$ км. Следовательно, радиус их геоцентрической орбиты составляет $r_s = 6678 \div 6878$ км. Далее будем использовать среднее значение указанного интервала – $\bar{r}_s = 6778$ км (заметим, что почти на такой высоте движется Международная космическая станция, МКС). Определим период вращения такого ИСЗ, для этого воспользуемся третьим законом Кеплера (в классической форме):

Дано:
$\varphi_S = 53°12'$ с.ш., $\lambda = 50°06'$ в.д.
Найти:
Над какой местностью – ?

$$\left(\frac{T_s}{T_☾}\right)^2 = \left(\frac{a_s}{a_☾}\right)^3, \tag{8}$$

$$\Rightarrow \ T_s = T_☾ \left(\frac{a_s}{a_☾}\right)^{3/2} = 6.397 \cdot 10^{-2}\,\text{сут} = 1.535\,\text{час}.$$

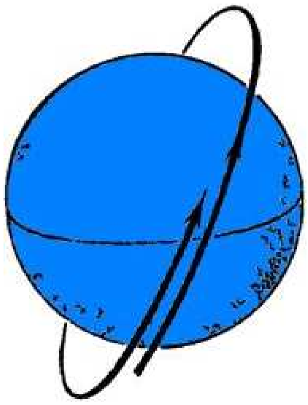

Рис. 4. Смещение орбиты ИСЗ относительно поверхности Земли.

Здесь $a_☾ = 384399$ км, $T_☾ = 27.32$ сут – большая полуось орбиты Луны и ее период обращения соответственно. Т.о. через 1 час 32 мин данный спутник вернется в исходную точку орбиты с точки зрения воображаемого наблюдателя, находящегося в центре Земли. За это время Земля повернется на некоторый угол $\Delta\lambda$ в направлении "на восток", следовательно, спутник относительно наблюдателя, находящегося в г. Самара, пройдет через исходную точку к западу от Самары (см. рис. 4). Т.о. координаты точки поверхности Земли над которой пройдет данный спутник ($\varphi = 53°12'$ с.ш., $\lambda = \lambda_S - \Delta\lambda$ в.д.). Далее учтем, что за $T_\oplus = 23^{ч}56^{м}04^{с} = 86164$ с Земля деднает один полный оборот на $360°$. Следовательно, можно составить следующую пропорцию:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda \to 1.535\,\text{час} \\ 360° \to 23^{ч}56^{м}04^{с}, \end{array}\right\} \Rightarrow \ \Delta\lambda = 360° \left(\frac{1.535}{23.934}\right) = 23.1°.$$

Т.о. координаты точки поверхности Земли, над которой пройдет данный спутник ($53°12'$ с.ш., $27°01'$ в.д.). Согласно политической карте рис. 5, данная точка лежит на территории Белоруссии в юго-западном направлении от Минска.

Ответ: координаты точки поверхности Земли, над которой пройдет спутник ($53°12'$ с.ш., $27°01'$ в.д.), данная точка лежит на территории Белоруссии, недалеко от Минска, в юго-западном направлении. ($\$_{\max} = 7$ баллов).

Задача № 9. «Разрешающая способность человеческого глаза и орбита планеты X»

Условие. Как известно, разрешающая способность здорового человеческого глаза составляет порядка $1'$. Каков радиус круговой орбиты и период обращения воображаемого небесного тела (назовем его ***планета X***), движущегося вокруг Солнца, с поверхности которого космонавт еще мог бы разрешить диск Солнца (т.е. увидеть Солнце как неточечный объект)? К орбите какой классической планеты ближе прочих расположена орбита данного тела? С поверхности каких классических и карликовых планет Солнце видно как неточеченый объект? Радиус Солнца составляет $\mathfrak{R}_\odot = 6.961 \cdot 10^8$ м. (8 баллов).

Решение:

Определить радиус круговой орбиты данного тела можно из условия равенства разрешающей способности человеческого глаза β_y и углового диаметра Солнца:

$$D''_{\odot,\,P} = 2 \cdot 206265'' \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathfrak{R}_\odot}{r}\right) \approx 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}_\odot}{r}\right) = \beta_y, \ \Rightarrow \tag{9}$$

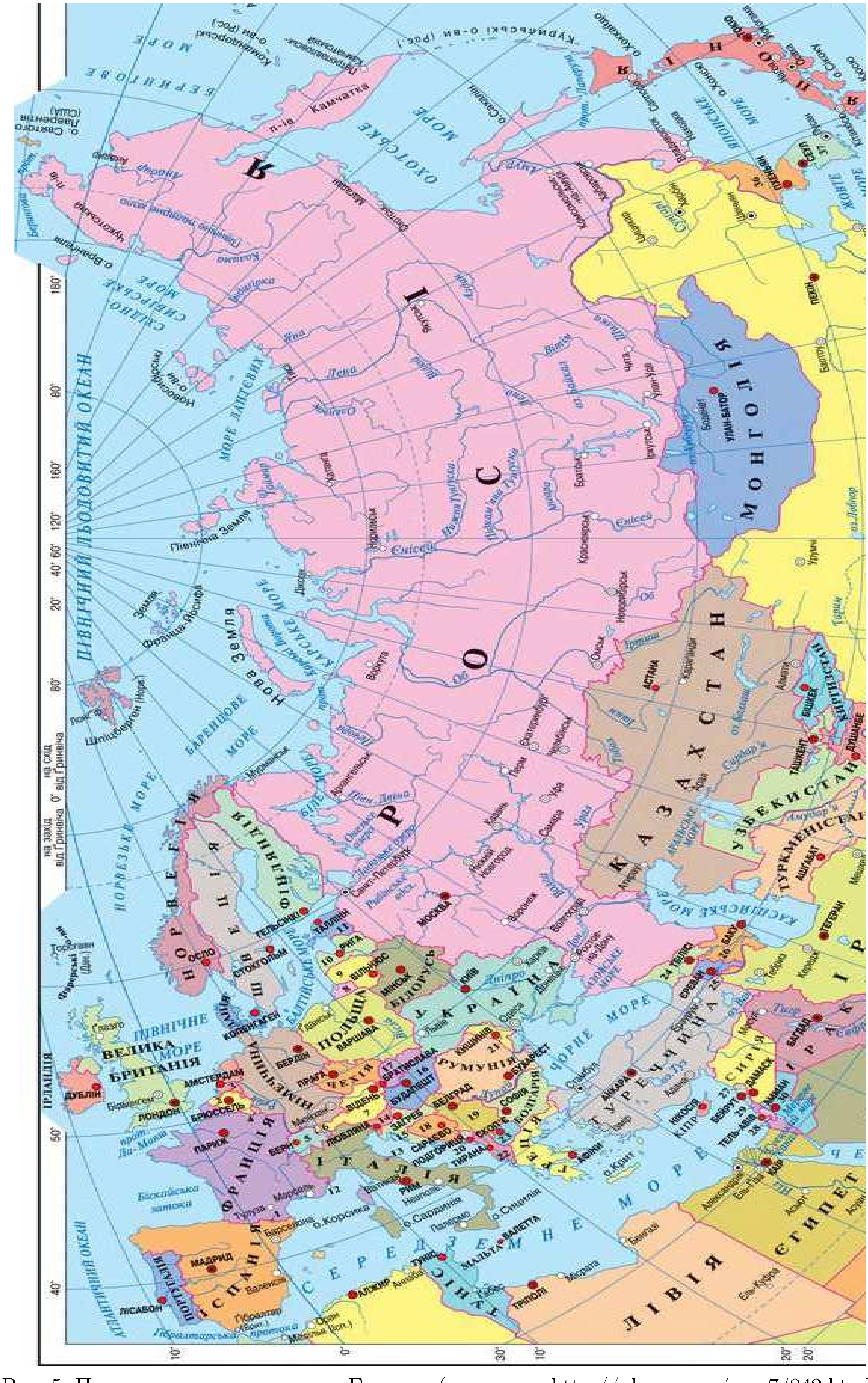

Рис. 5. Политическая карта части Евразии (источник: http://ukrmap.su/ru-g7/842.html).

$$r = 2 \cdot 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\beta_y}\right) = 4.786 \cdot 10^{12}\,\text{м} = 31.99\ \text{а.е.} \tag{10}$$

Период обращения найдем с использованием третьего закона Кеплера (в классической форме):

Дано:
$\mathfrak{R}_\odot = 6.961 \cdot 10^8$ м,
$\beta_y = 1' = 60''$.

Найти:
r, T – ?

$$\left(\frac{r}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2, \;\Rightarrow\; T = T_\oplus \left(\frac{r}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 181\,\text{год}. \tag{11}$$

Опираясь на полученные результаты, можно заключить, что орбита данного тела расположена ближе всего к орбите Нептуна (большая полуось – 30.10 а.е., см. таблицу 1), причем дальше от Солнца.

Если расстояние в перигелии гелиоцентрической орбиты планеты меньше найденного r, то диск Солнца можно разрешить в принципе, в противном случае – Солнце всегда видится космонавту как точка.

Поскольку орбиты всех классических планет (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) лежат полностью внутри орбиты ***планеты X*** (см. таблицу 1), следовательно, с поверхности всех классических планет в любой момент времени, в идеальных условиях космонавт может разрешить диск Солнца.

Таблица 1.

Планета	a, а.е.	q, а.е.	Q, а.е.	Планета	a, а.е.	q, а.е.	Q, а.е.
Классические				Карликовые			
Меркурий	0.387	0.307	0.467	Церера	2.765	2.547	2.984
Венера	0.723	0.718	0.728	Плутон	39.482	29.658	49.305
Земля	1.000	0.983	1.017	Эрида	68.047	38.464	97.631
Марс	1.524	1.381	1.666	Хаумеа	42.985	34.494	51.475
Юпитер	5.204	4.950	5.458	Макемаке	45.436	38.051	52.821
Сатурн	9.582	9.048	10.116	–	–	–	–
Уран	19.229	18.376	20.083	–	–	–	–
Нептун	30.104	29.766	30.441	–	–	–	–

Здесь a – большая полуось, q, Q – гелиоцентрические расстояния до перигелия и афелия орбиты планеты.

Некоторые орбитальные характеристики классических планет и планет-карликов.

В отношении карликовых планет (Церера, Плутон, Эрида, Хаумеа, Макемаке) ситуация иная. Орбита Цереры лежит глубоко внутри орбиты ***планеты X*** (см. таблицу 1), и потому с ее поверхности Солнце всегда видно как неточечное тело. Гелиоцентрическое расстояние Плутона меняется в пределах $29.66 \div 49.31$ а.е. Поэтому в окрестности перигелия с поверхности Плутона можно разрешить диск Солнца. На большей части своей орбиты планета находится от Солнца на расстояниях, больших r, и потому здесь Солнце – точечный объект. Перигелии Эриды, Хаумеи, Макемаке лежат дальше указанного рубежа, поэтому здесь диск Солнца не разрешается глазом космонавта.

Ответ: $r = 31.99$ а.е., $T = 181$ год; орбита данного тела расположена ближе всего к орбите Нептуна (большая полуось – 30.10 а.е.); с поверхности всех классических планет (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) и карликовой планеты – Церера Солнце всегда видно как неточечный объект; с поверхности Плутона можно разрешить диск Солнца лишь в окрестности перигелия его орбиты. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Утренняя пробежка космонавтов будущего по астероиду»

Условие. Предположим, что космонавты будущего, путешествуя по поясу астероидов, решили совершить пробежку (с такой же скоростью, как на Земле) по поверхности одного из таких тел. Характерная плотность пород, слагающих астероиды, составляет $\rho_a = 3.5$ г/см^3. Какие размеры могут иметь астероиды, пригодные для такой пробежки, чтобы космонавты не смогли "упасть" в космос? (8 баллов).

Дано:	**Решение:**
$\rho_a = 3.5$ г/см^3.	Как известно, человек на поверхности Земли может развивать скорость вплоть до $V_{\max} = 10$ м/с. Чтобы космонавты могли совершить пробежку и не упасть в космос, их максимальная скорость движения не должна превышать первую космическую скорость астероида V_I, иначе они оторвутся от поверхности и бег прекратится, т.е.
Найти: $\mathfrak{R}_a$ – ?	$$V_{\max} \le V_I.$$

Первая космическая скорость астероида может быть представлена в виде:

$$V_I = \sqrt{\frac{G\,\mathfrak{M}_a}{\mathfrak{R}_a}}. \tag{12}$$

учитывая, что масса астероида – шара есть

$$\mathfrak{M}_a = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{R}_a^3\,\rho_a, \;\Rightarrow\; V_I = \sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_a \mathfrak{R}_a^2}. \tag{13}$$

В итоге имеем следующее неравенство

$$V_{\max} \le \sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_a \mathfrak{R}_a^2}, \;\Rightarrow\; \mathfrak{R}_a \ge V_{\max}/\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_a} = 1.01\cdot 10^4\,\text{м} = 10.1\,\text{км}.$$

Следовательно, для прогулки подходят астероиды радиус которых более 10.1 км.

Ответ: $\mathfrak{R}_a \ge V_{\max}/\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,G\,\rho_a} = 10.1$ км. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Квавар – один из крупнейших объектов пояса Койпера»

Условие. В 2002 году группой американских астрофизиков был открыт транснептуновый объект Квавар (Quaoar), являющийся одним из крупнейших объектов в поясе Койпера. На момент открытия данное тело находилось в созвездии Змееносца и имело видимый блеск 18.5^m. Согласно астрометрическим данным большая полуось Квавара составляет $a_Q = 43.405$ а.е. Как долго данный объект перемещается по созвездию Змееносца, если Солнцу для этого требуется около 20 суток? Телескоп с объективом какого минимального диаметра необходим для а) визуальных наблюдений данного объекта, б) для разрешения его диска (при условии его видимости в телескоп) в случае, когда объект подойдет на минимальное расстояние, если диаметр Квавара оценивается в 1074 км, а эксцентриситет $\varepsilon_Q = 0.039$? (9 баллов).

Дано:	**Решение:**
$m_v = 18.5^m$, $a_Q = 43.405$ а.е., $\varepsilon_Q = 0.039$, $\mathfrak{D}_Q = 1074$ км, $\Delta t_\odot = 20$ сут,	Определим период обращения данного тела вокруг Солнца с использованием третьего закона Кеплера (11), в итоге $T_Q = a_Q^{3/2} = 286$ лет. Т.о. за указанный период объект делает один полный оборот вокруг Солнца, следовательно ее средняя угловая скорость, составляет $$\omega_Q = \frac{360^\circ}{T_Q} = 1.26^\circ/\text{год} = 3.45\cdot 10^{-3}\,\text{град/сут} = 12.4''/\text{сут}.$$
Найти: Δt_Q, $D_{\min}$ – ?	При этом угловая скорость видимого движения Солнца есть $$\omega_\odot = \frac{360^\circ}{T_\oplus} = 0.986\ \text{град/сут},$$

здесь $T_\oplus = 365.25$ сут – звездный год. Протяженность созвездия можно охарактеризовать углом, который покрывает каждое тело со своей угловой скоростью, тогда

$$\omega_\odot\cdot\Delta t_\odot = \omega_Q\cdot\Delta t_Q, \;\Rightarrow\; \Delta t_Q = \Delta t_\odot \frac{\omega_\odot}{\omega_Q} = 5716\,\text{сут} = 15.6\,\text{лет}.$$

Для визуальных наблюдений Квавара необходим телескоп, проницающая сила которого не меньше звездной величины объекта, т.е.

$$m_T \geq m_v, \;\Rightarrow\; 2.1^m + 5\lg D_T \geq m_v.$$

В предельном случае

$$2.1^m + 5\lg D_{\min} = m_v, \;\Rightarrow\; D^{(1)}_{\min} = 10^{0.2(m_v - 2.1^m)} = 1905\,\text{мм} \approx 1.91\,\text{м}.$$

Для того чтобы разрешить диск данного тела в телескоп в принципе, необходимо, что его разрешающая способность была не больше его максимального видимого углового диаметра, т.е.

$$\beta_T \leq D''_{Q\,\max}.$$

С учетом того, что разрешающая способность рефлектора выше чем рефрактора и определяется выражением

$$\beta_T = \frac{120''}{D[\text{мм}]}, \tag{14}$$

а угловой диаметр тела определяется выражением (9), в итоге исходное неравенство перепишется в виде:

$$\frac{120''}{D^{(2)}_{\min}[\text{мм}]} \leq 206265'' \times \left(\frac{\mathfrak{D}_Q}{r_{\min}}\right), \;\Rightarrow\; D^{(2)}_{\min}[\text{мм}] \geq \frac{120''}{206265''}\frac{r_{\min}}{\mathfrak{D}_Q}.$$

Очевидно, что минимальное расстояние между наблюдателем и Кваваром достигается, когда последний находится в противостоянии и в перигелии своей орбиты одновременно, тогда

$$r_{\min} = a_Q(1 - \varepsilon_Q) - a_{\oplus} = 40.712\,\text{а.е.} = 6.091 \cdot 10^9\,\text{км}.$$

В итоге $D^{(2)}_{\min} = 3330$ мм $= 3.33$ м.

Ответ: $\Delta t_Q = 15.6$ лет, $D^{(1)}_{\min} = 1905\,\text{мм} \approx 1.91\,\text{м}$, $D^{(2)}_{\min} = 3330$ мм $= 3.33$ м. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Замечание: Для определения диаметра объектива (зеркала или линзы) телескопа, который мог бы разрешить Квавар, можно было использовать менее точную формулу для разрешающей способности:

$$\beta_T = \frac{140''}{D[\text{мм}]}.$$

Однако, последняя в большей степени справедлива для телескопов-рефракторов. К сожалению, в мире не существует рефракторов со столь большим объективом. Поэтому, в принципе, для таких целей подходит лишь рефлектор, для которого справедлива формула (14).

Задача № 12. «Размеры и плотность самой легкой и массивной черной дыры»

Условие. В 2003 году в двойной системе IGR J17091, находящейся в созвездии Скорпиона, астрофизики зафиксировали яркую рентгеновскую вспышку. Последующие исследования этой системы показали, что она состоит из "нормальной" звезды и черной дыры (ЧД), масса которой оказалась близкой к минимально возможной массе ЧД звездного типа ($\mathfrak{M}^{(\min)}_{BH} = 3\,\mathfrak{M}_{\odot}$). Эта ЧД имеет минимальную массу, среди всех черных дыр, обнаруженных косвенными методами на данный момент. В конце 2012 года с использованием телескопа имени Хаббла ученые обнаружили в галактике NGC 1277 сверхмассивную ЧД с самой большой массой из известных сегодня ($\mathfrak{M}^{(\max)}_{BH} = 2 \cdot 10^{10}\,\mathfrak{M}_{\odot}$). С использованием данных, полученных исследователями, определите интервалы возможных значений для радиуса и массовой плотности черных дыр, наблюдаемых сегодня (в предположении, что все промежуточные значения массы ЧД допустимы). Во сколько раз отличаются данные параметры для самой легкой и самой массивной ЧД? (10 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_{BH}^{(\min)} = 3\,\mathfrak{M}_{\odot}$,
$\mathfrak{M}_{BH}^{(\max)} = 2\cdot 10^{10}\,\mathfrak{M}_{\odot}$.

Найти:
$(\mathfrak{R}_{BH}^{(\min)}, \mathfrak{R}_{BH}^{(\max)})$ – ?
$(\rho_{BH}^{(\min)}, \rho_{BH}^{(\max)})$ – ?
$\mathfrak{R}_{BH}^{(\max)}/\mathfrak{R}_{BH}^{(\min)}$ – ?
$\rho_{BH}^{(\max)}/\rho_{BH}^{(\min)}$ – ?

Решение:

Как известно, ***черная дыра*** (ЧД) – область четырехмерного пространства-времени, гравитационное притяжение которой настолько велико, что покинуть ее не могут даже объекты, движущиеся со скоростью света, в том числе кванты самого света. Граница этой области называется ***горизонтом событий***, а ее характерный размер – ***гравитационным радиусом*** или ***радиусом Шварцшильда***. Последний можно определить из условия, что на горизонте событий вторая космическая скорость ЧД равна скорости света:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\rm BH}}{\mathfrak{R}_{BH}}} = c, \;\Rightarrow$$

$$\mathfrak{R}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{\rm BH}}{c^2}. \tag{15}$$

Из последнего выражения следует, что чем больше масса черной дыры, тем больше ее радиус. Следовательно, сверхмассивная ЧД будет определять верхнюю границу интервала возможных значений радиуса ЧД, а ЧД звездного типа – нижнюю границу, т.е.

$$\mathfrak{R}_{BH}^{(\min)} = \frac{2\cdot 6.673\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 1.989\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}}\,\text{м} = 8.848\,\text{км}.$$

$$\mathfrak{R}_{BH}^{(\max)} = \frac{2\cdot 6.673\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{10}\cdot 1.989\cdot 10^{30}}{9\cdot 10^{16}}\,\text{м} = 5.899\cdot 10^{10}\,\text{км}.$$

Следовательно,

$$8.848\,\text{км} \le \mathfrak{R}_{BH} \le 5.899\cdot 10^{10}\,\text{км}, \quad \mathfrak{R}_{BH}^{(\max)}/\mathfrak{R}_{BH}^{(\min)} = \mathfrak{M}_{BH}^{(\max)}/\mathfrak{M}_{BH}^{(\min)} = 6.67\cdot 10^{9}. \tag{16}$$

Среднюю массовую плотность определим выражением

$$\rho_{\rm BH} = \frac{\mathfrak{M}_{\rm BH}}{V_{\rm BH}} = \frac{\mathfrak{M}_{\rm BH}}{\frac{4}{3}\pi\mathfrak{R}_{BH}^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3\,\mathfrak{M}_{BH}^2}. \tag{17}$$

Из последнего результата следует, что чем меньше масса черной дыры тем выше ее плотность (т.е. $\rho_{\rm BH} \sim \mathfrak{M}_{BH}^{-2}$). Следовательно, сверхмассивная ЧД будет определять нижнюю границу интервала возможных значений средней массовой плотности ЧД, а ЧД звездного типа – верхнюю границу, т.е.

$$\rho_{\rm BH}^{(\min)} = \frac{3\,c^6}{32\pi G^3\,4\cdot 10^{20}\,\mathfrak{M}_{\odot}^2} = 4.62\cdot 10^{-2}\,\text{кг/м}^3$$

$$\rho_{\rm BH}^{(\max)} = \frac{c^6}{96\pi G^3\,\mathfrak{M}_{\odot}^2} = 2.06\cdot 10^{18}\,\text{кг/м}^3$$

Т.о.

$$4.62\cdot 10^{-2}\,\text{кг/м}^3 \le \rho_{\rm BH} \le 2.06\cdot 10^{18}\,\text{кг/м}^3, \quad \rho_{\rm BH}^{(\max)}/\rho_{\rm BH}^{(\min)} = (\mathfrak{M}_{BH}^{(\max)}/\mathfrak{M}_{BH}^{(\min)})^2 = 4.44\cdot 10^{19}. \tag{18}$$

Ответ: $8.848\,\text{км} \le \mathfrak{R}_{BH} \le 5.899\cdot 10^{10}\,\text{км}$, $\mathfrak{R}_{BH}^{(\max)}/\mathfrak{R}_{BH}^{(\min)} = 6.67\cdot 10^{9}$; $4.62\cdot 10^{-2}\,\text{кг/м}^3 \le \rho_{\rm BH} \le 2.06\cdot 10^{18}\,\text{кг/м}^3$, $\rho_{\rm BH}^{(\max)}/\rho_{\rm BH}^{(\min)} = 4.44\cdot 10^{19}$. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

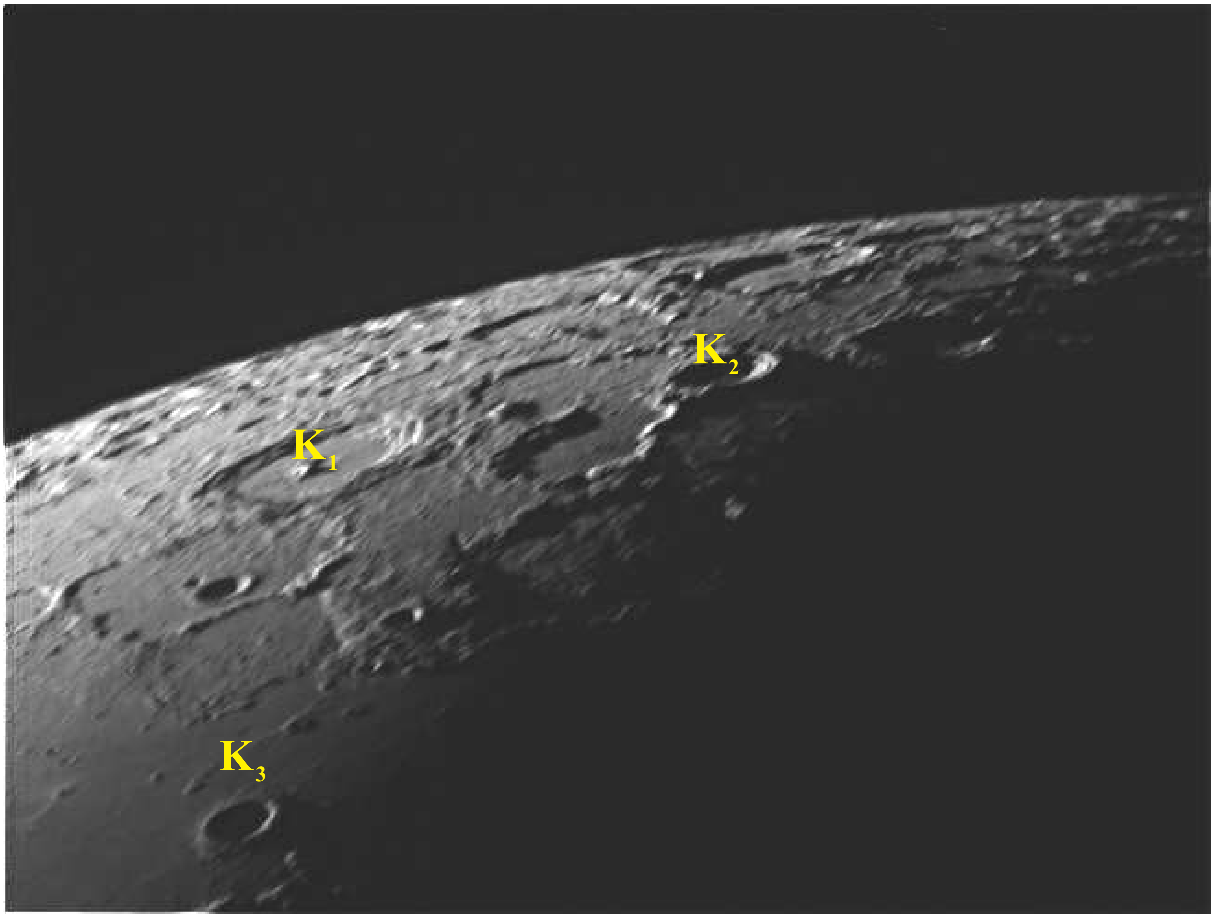

Рис. 6.

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Фотография лунных кратеров»

Условие. В период с 8 по 14 августа 2013 года на обсерватории ДООЦ «Жигули» Бахтиным П.И. и Гришиным К.А. были проведены наблюдения Луны, в частности, была получена фотография (см. рис. 6) части ее поверхности. Используя данную фотографию и данные о Луне, оцените линейный и угловой диаметры (для земного наблюдателя) трех кратеров $K_1 - K_3$. (11 баллов).

Решение:

Прежде всего, определим угловой (μ_a) и линейный (μ_ℓ) масштаб фотографии следующими выражениями:

$$\mu_a = \frac{\rho''_{☾}}{R_{☾}}, \quad \mu_\ell = \frac{\mathfrak{R}_{☾}}{R_{☾}}, \tag{19}$$

где $\rho''_{☾} = 15.535'$ – средний угловой радиус Луны, $\mathfrak{R}_{☾} = 1.737 \cdot 10^3$ км – средний линейный радиус Луны, полученные по данным наблюдений профессионалов, $R_{☾}$ – линейный радиус Луны, измеренный по фотографии.

К сожалению, измерить непосредственно радиус видимого диска Луны по фотографии не представляется возможным. Поэтому будем для этого использовать несложную методику косвенного определения $R_{\odot}$. Рассмотрим круг радиуса R и круговой сегмент $ACBDA$, с высотой h и основанием $AB = 2a$ (см. рис. 7). Из треугольника $\triangle ADO$ по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2, \;\Rightarrow\; R = \frac{(a^2 + h^2)}{2h}.$$

Т.о. для определения радиуса круга необходимо знать высоту h кругового сегмента и половину его основания – a.

Выполним дополнительное построение на данной фотографии. Проведем через верхнюю точку C части видимого диска Луны (см. рис. 8) касательную. Проведем параллельную ей прямую, через крайнюю левую точку A диска. Опустим из точки C на нее перпендикуляр CD. В результате мы получаем половину кругового сектора $ACDA$, для которого $h_☾ = CD$, $a_☾ = AD$ и, следовательно,

$$R_☾ = \frac{(a_☾^2 + h_☾^2)}{2h_☾}. \tag{20}$$

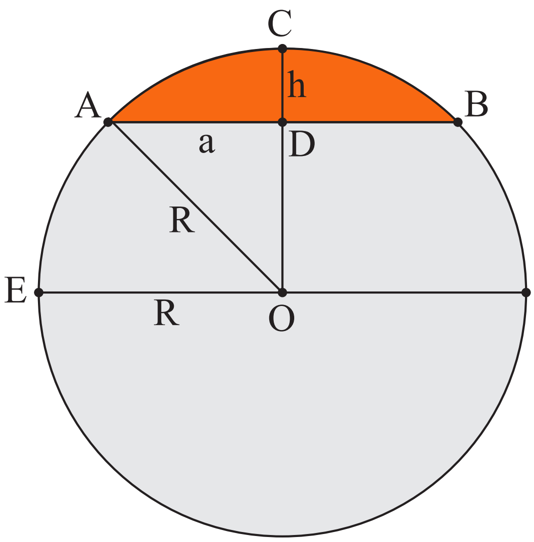

Рис. 7.

Определяя по фотографии значения $a_☾ = 24.4$ см, $h_☾ = 5.6$ см (ваши значения могут отличаться от указанных, в зависимости от формата используемой фотографии), в итоге получаем $R_☾ = 55.957$ см. Тогда угловой и линейный масштаб фотографии представляются значениями $\mu_a = 16.7''/\text{см}$, $\mu_\ell = 31.0$ км/см.

Далее определяем линейные размеры отмеченных кратеров по фотографии: $d_1 = 4.4$ см, $d_2 = 2.35$ см, $d_3 = 1.6$ см.

В итоге угловые и линейные диаметры кратеров $K_1 - K_3$ есть

$$D_1'' = \mu_a \cdot d_1 = 73.5'', \quad D_1 = \mu_\ell \cdot d_1 = 136\,\text{км},$$

$$D_2'' = \mu_a \cdot d_2 = 39'', \quad D_2 = \mu_\ell \cdot d_2 = 73\,\text{км},$$

$$D_3'' = \mu_a \cdot d_3 = 27'', \quad D_3 = \mu_\ell \cdot d_3 = 50\,\text{км}.$$

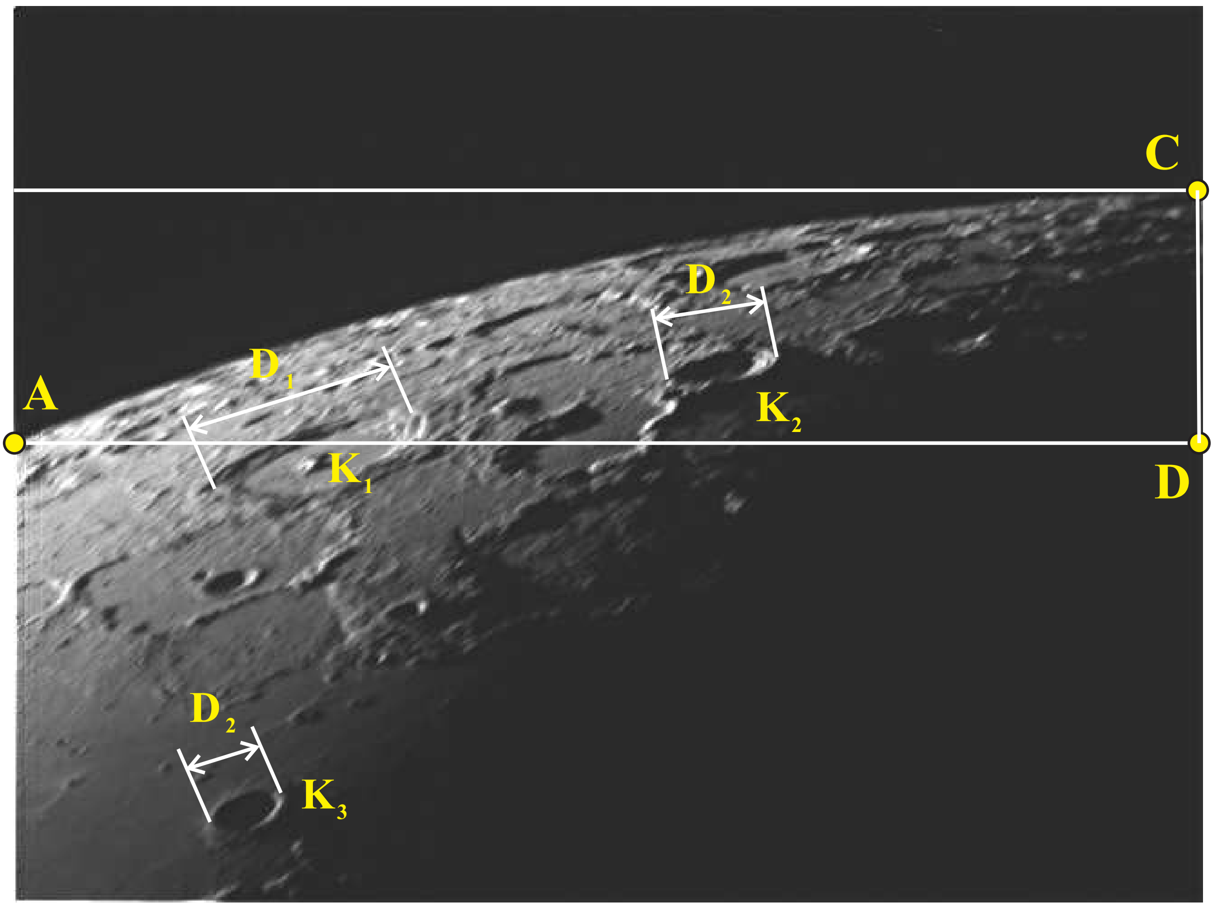

Рис. 8.

Ответ: $D_1 = 136$ км, $D_2 = 73$ км, $D_3 = 50$ км; $D_1'' = 73.5''$, $D_2'' = 39''$, $D_3'' = 27''$. (\$$_{\max} =$ 11 баллов).

Задача № 14. «Траектория МКС в ЦУПе и высота ее орбиты»

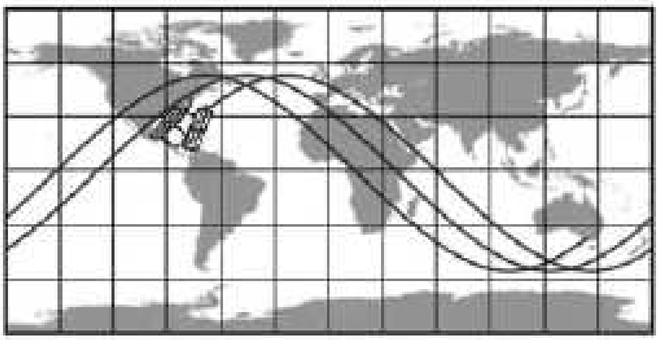

Рис. 9.

Условие. На большом экране в Центре управления полетами (ЦУП) отображается траектория Международной космической станции (МКС) – след от пересечения поверхности Земли прямой, проведенной от центра Земли к станции (см. рис. 9). Станция движется по круговой орбите. Оцените с помощью данного рисунка высоту h космической станции над поверхностью Земли. Считайте, что радиус Земли равен $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g_0 = 9.81$ м/с^2. (12 баллов).

Дано:
$\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км,
$g_0 = 9.81$ м/с^2.

Найти:
h – ?

Решение:
Прежде всего, найдем период обращения спутника, движущегося по круговой орбите на уровне поверхности Земли:

$$T_0 = \frac{2\,\pi\,\mathfrak{R}_\oplus}{V_I} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{g_0}} = 5063\,\text{с} = 1.41\,\text{часа},$$

где $V_I = \sqrt{g_0\,\mathfrak{R}_\oplus} = 7.91$ км/с – первая космическая скорость для Земли у ее поверхности.

Определим период обращения МКС. Если бы Земля не вращалась, то МКС, совершив целое число полных оборотов, пересекала бы экватор в одних и тех же точках. Но поскольку Земля вращается, то за период обращения МКС она успевает повернутся на некоторый угол, и станция пересекает экватор второй раз уже в точке, находящейся немного западнее (Земля вращается с запада на восток). Именно поэтому траектория станции немного смещается. За период обращения станция ее смещение составляет, очевидно, 0.75 клетки. За звездные сутки $T_\oplus = 23^\text{ч}56^\text{м}04^\text{с} = 86164$ с Земля завершила один оборот вокруг своей оси и смещение составило бы 12 клеток. Значит период обращения МКС составит

$$T = T_\oplus\left(\frac{0.75}{12}\right) = 5385\,\text{с} = 1.50\,\text{часа}.$$

Далее воспользуемся третьим законом Кеплера в классической форме для МКС и спутника, движущегося на уровне поверхности Земли, учитывая, что радиус орбиты МКС составляет $\mathfrak{R}_\oplus + h$:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus + h}{\mathfrak{R}_\oplus}\right)^3, \;\Rightarrow\; h = \mathfrak{R}_\oplus\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right) = 267\,\text{км}. \qquad (21)$$

Ответ: $h = \mathfrak{R}_\oplus\left(\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} - 1\right) = 267\,\text{км}$. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Кометная гипотеза происхождения колец Сатурна»

Условие. Согласно современным представлениям, ***кольца Сатурна*** – система плоских концентрических образований (скоплений) льда и пыли, располагающаяся в экваториальной плоскости Сатурна. Исследования колец показали, что последние состоят, главным образом, из водяного льда (около 99%) с примесями силикатной пыли. Внутренняя граница колец лежит на расстоянии $6.7 \cdot 10^4$ км от центра планеты, а внешняя – $1.368 \cdot 10^5$ км (при этом радиус Сатурна – $\mathfrak{R}_{♄} = 6.027 \cdot 10^4$ км, а средняя массовая плотность – $\bar{\rho}_{♄} = 687$ кг/м^3). При этом толщина колец чрезвычайно мала – от 10 м до 1 км. Общая масса обломочного материала колец оценивается в $3 \cdot 10^{19}$ кг. Возраст колец не более 100 млн. лет. Одна из гипотез происхождения колец гласит – в прошлом Сатурн захватил своим полем тяготения и разрушил приливными силами пролетающую мимо комету гигантских размеров. Опираясь на представления о плотности комет и о полости Роша, допуская существование гигантских комет и предполагая, что разрушение произошло в пределах области, занимаемой сегодня кольцами, докажите что такой сценарий в принципе возможен. Оцените минимальные возможные размеры этой гигантской кометы. (13 баллов).

Решение:

Пусть комета изначально имела среднюю массовую плотность $\bar{\rho}_c$. Комета при прохождении вблизи Сатурна может быть разрушена приливными силами, если минимальное расстояние $r_{\min}$ между кометой и Сатурном в процессе сближения будет больше чем радиус ее полости Роша. Последний определяется выражением:

$$r_{\min} \leq R_{\text{Roche}} = \mathfrak{R}_{\text{♄}}\, 2^{1/3} \sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{♄}}}{\bar{\rho}_c}}.$$

Дано:

$\mathfrak{R}^{(r)}_{\min} = 6.7 \cdot 10^4$ км,
$\mathfrak{R}^{(r)}_{\max} = 1.368 \cdot 10^5$ км,
$\mathfrak{R}_{\text{♄}} = 6.027 \cdot 10^4$ км,
$\bar{\rho}_{\text{♄}} = 687$ кг/м^3,
$\mathfrak{M}^{(r)} = 3 \cdot 10^{19}$ кг

Найти:

док-ть приемлемость гипотезы,
$\mathfrak{R}_{c\ \min}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, разрушение кометы произошло в пределах области, занимаемой сегодня кольцами, тогда

$$\mathfrak{R}^{(r)}_{\min} \leq r_{\min} \leq \mathfrak{R}^{(r)}_{\max}, \;\Rightarrow\; \mathfrak{R}^{(r)}_{\min} \leq R_{\text{Roche}} \leq \mathfrak{R}^{(r)}_{\max}.$$

Из последнего двойного неравенства мы получаем ограничения для средней массовой плотности гигантской кометы:

$$2\bar{\rho}_{\text{♄}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\text{♄}}}{\mathfrak{R}^{(r)}_{\max}}\right)^3 \leq \bar{\rho}_c \leq 2\bar{\rho}_{\text{♄}} \left(\frac{\mathfrak{R}_{\text{♄}}}{\mathfrak{R}^{(r)}_{\min}}\right)^3, \;\Rightarrow\; 117\,\text{кг/м}^3 \leq \bar{\rho}_c \leq 1000\,\text{кг/м}^3.$$

Последний интервал возможных значений для средней массовой плотности ядра кометы уверенно согласуется с известными оценками искомой величины, например, массовая плотность кометы 1P/Галлея оценивается интервалом возможных значений $200 \div 1500$ кг/м^3. Кроме того, большинство комет, главным образом, состоят из водяного льда, что также говорит в пользу кометной гипотезы происхождения колец.

Оценим минимальный возможный радиус ядра такой кометы. Поскольку масса ядра есть

$$\mathfrak{M}_c = \frac{4}{3}\pi\,\bar{\rho}_c\,\mathfrak{R}_c^3, \;\Rightarrow\; \mathfrak{R}_c = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_c}{\bar{\rho}_c}}.$$

Очевидно, что масса ядра кометы не может быть меньше массы колец (часть кометы может быть поглощена Сатурном), т.е. $\mathfrak{M}_c \geq \mathfrak{M}^{(r)}$ следовательно,

$$\mathfrak{R}_{c\ \min} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_r}{\bar{\rho}_c}}, \;\Rightarrow\; 197\,\text{км} \leq \mathfrak{R}_{c\ \min} \leq 394\,\text{км}.$$

Главным контраргументом настоящей гипотезы является ненаблюдаемость комет с диаметром более 100 км. Однако статистика наблюдений комет не столь велика, чтобы категорически отвергать существование подобных тел. Т.о. данная гипотеза возникновения колец имеет право на существование ▲.

Ответ: $197\,\text{км} \leq \mathfrak{R}_{c\ \min} \leq 394\,\text{км}$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Давление в центре Земли»

Условие. Некоторая планета представляет собой однородный шар массы $\mathfrak{M}$ и радиуса $\mathfrak{R}$. Найти давление вещества p внутри планеты, обусловленное гравитационным сжатием, как функцию расстояния r от ее центра. Определите давление p_c в центре планеты. С использованием полученного результата, оцените параметр p_c для Земли. (13 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$.
Найти:
$p(r)$, p_c – ?

Решение:

Рассмотрим тонкий сферический слой вещества в теле планеты толщиной Δr, находящийся на расстоянии r от центра планеты. В данном слое рассмотрим малый элемент массы Δm (см. рис. 6). Поскольку последний находится в состоянии относительного покоя, то, согласно второму закону Ньютона, сумма всех сил, приложенная к нему должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_{p\,1} + \vec{F}_{p\,2} + \Delta m\vec{g} = 0,$$

где $\vec{F}_{p\,1}$, $\vec{F}_{p\,2}$ – силы давления, действующие на данный элемент со стороны ниже и выше лежащих слоев вещества (см. рис. 6). Спроецируем данное уравнение на вертикальную ось OX.

$$F_{p\,1} - F_{p\,2} - \Delta mg = 0. \tag{22}$$

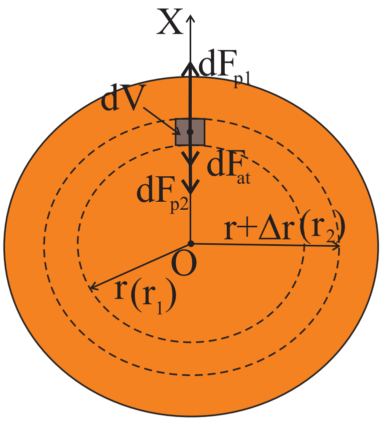

Рис. 6. К определению величины Δp.

Учтем, что силы давления и тяжести можно представить в виде:

$$F_{p\,1} = pS, \;\; F_{p\,2} = (p + \Delta p)S, \;\; \Delta mg = \rho\, S\, \Delta r\, \cdot g.$$

где $p-$давление газа на расстоянии r, $p + \Delta p$ – давление газа на расстоянии $r + \Delta r$; S – площадь оснований элемента, ρ – массовая плотность планеты, $g(r)$ – ускорение свободного падения на расстоянии r от центра планеты. Подставляя полученные выражения в уравнение (22) в итоге получаем:

$$\Delta p = -\rho\, g(r)\, \Delta r. \tag{23}$$

Ускорение свободного падения найдем из равенства силы тяжести и силы притяжения на поверхности шара радиуса r:

$$mg(r) = \frac{G\, m\, M(r)}{r^2}, \;\; \text{т.к.} \;\; M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\, \rho, \;\; \Rightarrow \;\; g(r) = \frac{4}{3}\pi\, G\, \rho\, r = G\, \mathfrak{M} \left(\frac{r}{\mathfrak{R}^3}\right).$$

здесь $M(r)$ – масса части планеты – шара радиуса r. Следовательно, разность величин давления на нижнем и на верхнем основании элемента есть

$$\Delta p = -\rho\, G\, \mathfrak{M} \left(\frac{r}{\mathfrak{R}^3}\right) \Delta r, \;\; \Rightarrow \;\; \Delta p = -\frac{3}{4\,\pi} \left(\frac{G\, \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^6}\right) r\, \Delta r, \;\; \text{где} \;\; \rho = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{4}{3}\pi\, \mathfrak{R}^3}. \tag{24}$$

Пусть $r = r_1$, $p_1 = p(r_1)$, $r_2 = r + \Delta r$, $p_2 = p(r_2)$, тогда

$$\Delta p = p_2 - p_1, \;\; r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \;\; \Delta r = r_2 - r_1.$$

Тогда уравнение (24) можно представить в виде:

$$p_2 - p_1 = -\frac{3}{8\,\pi} \left(\frac{G\, \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^6}\right) \left(r_2^2 - r_1^2\right). \tag{25}$$

Очевидно, что последний результат никак не связан с малостью элемента и потому справедлив для любых двух точек тела планеты. Выберем в качестве точки 1 точку поверхности планеты, где $p_1 = 0, r_1 = \mathfrak{R}$ а в качестве точки 2 – произвольную внутреннюю точку планеты – $r_2 = r$, тогда

$$p(r) = \frac{3}{8\,\pi} \left(\frac{G\, \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^4}\right) \left(1 - \frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}\right). \tag{26}$$

Теперь легко определить давление в центре планеты

$$p_c = p(0) = \frac{3}{8\,\pi} \left(\frac{G\, \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^4}\right). \tag{27}$$

В случае Земли – $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\oplus = 5.973 \cdot 10^{24}$ кг, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\oplus = 6.371 \cdot 10^6$ м. Тогда согласно (26), давление в центре Земли есть

$$p_c^{(\oplus)} = \frac{3}{8\,\pi}\left(\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus^2}{\mathfrak{R}_\oplus^4}\right) = 1.724 \cdot 10^{11}\text{ Па.}$$

Ответ: $p(r) = \frac{3}{8\,\pi}\left(\frac{G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^4}\right)\left(1 - \frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}\right)$, $p_c = \frac{3}{8\,\pi}\left(\frac{G\,\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}^4}\right)$; $p_c^{(\oplus)} = \frac{3}{8\,\pi}\left(\frac{G\,\mathfrak{M}_\oplus^2}{\mathfrak{R}_\oplus^4}\right) = 1.724 \cdot 10^{11}$ Па. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Давление света и критический радиус пылевой частицы»

Условие. Из многочисленных наблюдений за движением хвостов комет, установлено, что в движении пылевых частиц, составляющих эти хвосты, существенную роль играет давление солнечного света (точнее сказать, давление электромагнитного излучения Солнца). Чем меньше размер частиц, тем бóльшую роль играет данный фактор в ее движении. Опираясь на квантовые представления о свете и моделируя пылевую частицу абсолютно черным шаром радиуса R_P, определите явное выражение для силы давления F_p света. Докажите, что для этой силы справедлива зависимость вида $F_p \sim R_P^2$. Оцените критический радиус пылевой частицы с массовой плотностью $\rho_P = 10^3$ кг/м^3, при котором сила давления становится больше силы притяжения Солнца и как следствие, частица покидает Солнечную систему. (14 баллов).

Решение:

Определим явное выражение для силы давления F_p света. Согласно второму и третьему законам Ньютона, сила давления, действующая на неподвижную частицу со стороны падающего излучения, определяется выражением:

$$\vec{F}_p = -\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}, \tag{28}$$

где $\Delta\vec{P}$ – изменение импульса потока электромагнитного излучения (света), падающего на частицу за время Δt.

Согласно квантовой теории излучения, свет – это поток элементарных частиц – фотонов, импульс которых определяется выражением вида:

$$p_f = \frac{E_f}{c}, \tag{29}$$

где E_f – энергия фотона, c – скорость света в вакууме.

Согласно условию задачи, частица является ***абсолютно черным телом*** – телом, которое полностью поглощает любое падающее на его поверхность электромагнитное излучение, независимо от температуры этого тела. Тогда всякий фотон, падающий на поверхность частицы поглощается, при этом изменение его импульса есть

$$\Delta\vec{p}_f = 0 - p_f\,\vec{k} = -p_f\,\vec{k}.$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор, определяющий направление распространения фотонов.

Все фотоны движутся в направлении от Солнца по параллельным прямым, тогда число фотонов ΔN, падающих за единицу времени (Δt) на единичную площадку (ΔS), перпендикулярную направлению движения фотонов, поглощаются последней и терпят изменение импульса, равное

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_f \cdot \Delta N = \Delta\vec{p}_f \cdot n \cdot \Delta V = -p_f \cdot n \cdot \Delta S \cdot c \cdot \Delta t \cdot \vec{k}.$$

здесь n – объемная концентрация фотонов. Следовательно, силу давления для неподвижной частицы, согласно (28) и последнему выражению, можно представить в виде:

$$\vec{F}_p = E_f \cdot n \cdot \Delta S \cdot \vec{k}. \tag{30}$$

Далее учтем, что произведение энергии одного фотона на концентрацию фотонов есть

$$E_f \cdot n = \frac{E_f\,\Delta N}{\Delta V} = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{c}\left(\frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t}\right) = \frac{1}{c}E,$$

здесь использовано определение освещенности:

$$E = \left(\frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t}\right),$$

где W – энергия, переносимая светом, через площадку ΔS за время Δt.

С учетом последнего выражения, сила давления (30) представляется в виде:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{c}\,E\,S_P\,\vec{k} = \frac{1}{c}\,E\,\pi R_P^2\,\vec{k}. \tag{31}$$

С использованием закона сохранения энергии освещенность E можно определить через светимость Солнца ($L_\odot$):

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi \cdot r^2}. \tag{32}$$

Т.о. указанная сила для сферической частицы радиуса R_P представляется так

$$F_p = \frac{\alpha_p}{r^2}, \text{ где } \alpha_p = \frac{R_P^2\,L_\odot}{4\,c}. \tag{33}$$

Из последнего результата очевидно, что $F_p \sim R_P^2$. Следует отметить, что результат (33) часто использует для оценки силы светового давления в астрофизике. Однако, данное выражение справедливо только в том случае, если сферическая частица моделируется абсолютно черным телом.

Оценим критический радиус пылевой частицы из условия равенства силы давления и силы притяжения Солнца:

$$F_p = F_G, \text{ где } F_G = \frac{\alpha_G}{r^2}, \;\; \alpha_G = G\,m_P\,\mathfrak{M}_\odot \;\Rightarrow$$

и учитывая что масса частицы представляется в виде:

$$m_P = \frac{4}{3}\pi R_P^3 \rho_P.$$

В результате получаем уравнение вида

$$\frac{\alpha_p}{r^2} = \frac{\alpha_G}{r^2}, \;\Rightarrow\; \alpha_p = \alpha_G, \;\Rightarrow\; \frac{R_P^2\,L_\odot}{4\,c} = \frac{4}{3}\pi\,G\,R_P^3\,\rho_P\,\mathfrak{M}_\odot, \;\Rightarrow$$

$$R_P^{(c)} = \frac{3\,L_\odot}{16\,\pi\,c\,G\,\rho_P\,\mathfrak{M}_\odot} = 5.7 \cdot 10^{-7}\ \text{м}. \tag{34}$$

Ответ: $F_p = \dfrac{\alpha_p}{r^2}$, где $\alpha_p = \dfrac{R_P^2\,L_\odot}{4\,c}$; $R_P^{(c)} = \dfrac{3\,L_\odot}{16\,\pi\,c\,G\,\rho_P\,\mathfrak{M}_\odot} = 5.7 \cdot 10^{-7}$ м. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Испарение ЧД Хокинга и минимальная масса реликтовой ЧД»

Условие. В 1974 году известный теоретик-астрофизик С. Хокинг, изучая поведение квантовых полей в окрестности черной дыры (ЧД), впервые обосновал существование квантового процесса испускания разнообразных элементарных частиц, преимущественно фотонов, черной дырой, получившего название ***излучение (испарение) Хокинга***. Суть явления в следующем: гравитационное поле поляризует вакуум, в результате чего возможно образование не только виртуальных, но и реальных пар частица-античастица. Одна из частиц, оказавшаяся чуть ниже горизонта событий, падает внутрь черной дыры, а другая, оказавшаяся чуть выше горизонта, улетает, унося энергию (то есть часть массы) ЧД. *Благодаря данному процессу ЧД непрерывно* *теряет массу и время ее жизни оказывается конечным.* Мощность излучения черной дыры равна

$$P = \frac{\hbar\, c^6}{15360\, \pi\, G^2\, \mathfrak{M}_{BH}^2}, \tag{35}$$

здесь и далее $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}_{BH}$ – масса черной дыры. Спектр хокинговского излучения оказался строго совпадающим с излучением абсолютно черного тела, что позволило приписать ЧД температуру:

$$T_{BH} = \frac{\hbar\, c^3}{8\, \pi\, k\, G\, \mathfrak{M}_{BH}}, \tag{36}$$

где $k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. С использованием данных результатов определите закон изменения массы ЧД с течением времени ($\mathfrak{M}_{BH}(t)$). Определите выражение для времени жизни черной дыры ($\tau_{\rm life}$). С использованием полученного результата и формулы (36) вычислите время жизни и температуру ЧД с массой $\mathfrak{M}_{BH} = \mathfrak{M}_\odot$. Определите минимальную массу реликтовой ЧД (т.е. сохранившейся со времен Большого взрыва), ее радиус, среднюю плотность и температуру, если известно, что возраст Вселенной составляет 13.83 млрд. лет. (15 баллов).

Решение:

Излучение Хокинга приводит к уменьшению полной энергии (E) черной дыры, т.е.

$$P = -\frac{dE}{dt}.$$

С использованием формулы Эйнштейна

$$E = \mathfrak{M}_{BH}\, c^2, \tag{37}$$

и результата (35) данное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\hbar\, c^6}{15360\, \pi\, G^2\, \mathfrak{M}_{BH}^2} = -c^2\, \frac{d\mathfrak{M}_{BH}}{dt}, \;\Rightarrow\; \mathfrak{M}_{BH}^2\, d\mathfrak{M}_{BH} = -\frac{\hbar\, c^4}{15360\, \pi\, G^2} dt,$$

Пусть

$$K = \frac{\hbar\, c^4}{15360\, \pi\, G^2} = 3.966 \cdot 10^{15}\ \text{кг}^3 \cdot c^{-1}, \tag{38}$$

тогда дифференциальное уравнение представляется в виде:

$$\mathfrak{M}_{BH}^2\, d\mathfrak{M}_{BH} = -K\, dt$$

Проинтегрируем последнее уравнение по интервалу времени $(0, t)$, где масса ЧД изменялась в интервале $(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}, \mathfrak{M}_{BH})$.

$$\int_{\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}}^{\mathfrak{M}_{BH}} \mathfrak{M}^2\, d\mathfrak{M} = -\int_0^t K\, dt', \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\left(\mathfrak{M}_{BH}^3 - \left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3\right) = -K\, t, \;\Rightarrow$$

$$\mathfrak{M}_{BH}(t) = \sqrt[3]{\left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3 - 3\, K\, t}, \text{ или } \mathfrak{M}_{BH}(t) = \mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\, \sqrt[3]{1 - \alpha\, t}, \text{ где } \alpha = \frac{3\, K}{\left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3}. \tag{39}$$

Время жизни ЧД определяется условием равенства нулю ее массы, т.е. $\mathfrak{M}_{BH}(\tau_{\rm life}) = 0$. Следовательно, можно вычислить время жизни черной дыры:

$$\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\, \sqrt[3]{1 - \alpha\, \tau_{\rm life}} = 0, \;\Rightarrow\; \tau_{\rm life} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3}{3\, K} = \frac{5120\, \pi\, G^2\, \left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3}{\hbar\, c^4}. \tag{40}$$

Для ЧД с массой $\mathfrak{M}_{BH} = \mathfrak{M}_\odot$ имеем

$$\tau_{\rm life}^\odot = \frac{5120\,\pi\,G^2\,\mathfrak{M}_\odot^3}{\hbar\,c^4} = 6.61 \cdot 10^{74}\,c = 2.10 \cdot 10^{67}\,\text{лет}. \tag{41}$$

$$T_{BH}^\odot = \frac{\hbar\,c^3}{8\,\pi\,k\,G\,\mathfrak{M}_\odot} = 6.17 \cdot 10^{-8}\,K. \tag{42}$$

т.о. черная дыра с массой в одну солнечную живет гораздо дольше чем существуют наша Вселенная. При этом она является одним из холодных тел во Вселенной. С учетом полученных результатов удобно представить температуру и время жизни ЧД в приведенном виде:

$$T_{BH} = 6.17 \cdot 10^{-8}\,K \times \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_{BH}}\right), \quad \tau_{\rm life} = 2.10 \cdot 10^{67}\,\text{лет} \times \left(\frac{\mathfrak{M}_{BH}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^3. \tag{43}$$

Определим минимальную массу реликтовой ЧД (т.е. сохранившейся со времен Большого взрыва)из условия: время жизни такой дыры не может быть меньше чем возраст Вселенной – 13.83 млрд. лет, т.е.

$$2.10 \cdot 10^{67}\,\text{лет} \times \left(\frac{\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^3 = 1.383 \cdot 10^{10}\,\text{лет}, \;\Rightarrow$$

$$\mathfrak{M}_{BH}^{\min} = \mathfrak{M}_\odot \sqrt[3]{\frac{1.383 \cdot 10^{10}}{2.10 \cdot 10^{67}}} = 8.70 \cdot 10^{-20}\,\mathfrak{M}_\odot = 1.730 \cdot 10^{11}\ \text{кг}. \tag{44}$$

С использованием выражений (15), (17), (44) мы можем вычислить радиус Шварцшильда, среднюю массовую плотность и температуру ЧД:

$$\mathfrak{R}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}{c^2} = 2.57 \cdot 10^{-16}\,\text{м}. \tag{45}$$

$$\bar\rho_{BH} = \frac{\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}{\frac{4}{3}\,\pi\,\mathfrak{R}_{BH}^3} = 2.43 \cdot 10^{57}\,\text{кг/м}^3. \tag{46}$$

$$T_{BH} = 6.17 \cdot 10^{-8}\,K \times \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}\right) = 7.09 \cdot 10^{11}\,K. \tag{47}$$

Следует отметить, что по мере уменьшения массы ЧД интенсивность ее испарения нарастает лавинообразно, и заключительный этап эволюции носит характер взрыва, например, ЧД массой 10^3 тонн испарится за время порядка 84 секунды, выделив энергию, равную взрыву примерно десяти миллионов атомных бомб средней мощности.

В то же время, большие ЧД, температура которых ниже температуры реликтового излучения Вселенной (2.7 K), на современном этапе развития Вселенной могут только расти, так как испускаемое ими излучение имеет меньшую энергию, чем поглощаемое. Данный процесс продлится до тех пор, пока фотонный газ реликтового излучения не остынет в результате расширения Вселенной.

Ответ: $\mathfrak{M}_{BH}(t) = \mathfrak{M}_{BH}^{(0)} \sqrt[3]{1 - \alpha\,t}$, где $\alpha = \frac{3\,K}{\left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3}$, $\tau_{\rm life} = \frac{5120\,\pi\,G^2 \left(\mathfrak{M}_{BH}^{(0)}\right)^3}{\hbar\,c^4}$; $\tau_{\rm life}^\odot = \frac{5120\,\pi\,G^2\,\mathfrak{M}_\odot^3}{\hbar\,c^4} = 2.10 \cdot 10^{67}$ лет, $T_{BH}^\odot = \frac{\hbar\,c^3}{8\,\pi\,k\,G\,\mathfrak{M}_\odot} = 6.17 \cdot 10^{-8}\,K$; $\mathfrak{M}_{BH}^{\min} = 8.70 \cdot 10^{-20}\,\mathfrak{M}_\odot = 1.730 \cdot 10^{11}$ кг, $\mathfrak{R}_{BH} = \frac{2\,G\,\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}{c^2} = 2.57 \cdot 10^{-16}$ м, $\bar\rho_{BH} = \frac{\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}{\frac{4}{3}\,\pi\,\mathfrak{R}_{BH}^3} = 2.43 \cdot 10^{57}$ кг/м^3, $T_{BH} = 6.17 \cdot 10^{-8}\,K \times \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{M}_{BH}^{\min}}\right) = 7.09 \cdot 10^{11}\,K$. ($\$_{\max} = 15$ баллов).